

1. Eliminación Gaussiana

1.1. Ejemplo

(Autor: Rodrigo Russo)

Dado el sistema:

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 = 9 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 15 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

Planteamos la matriz ampliada $[A|B]$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 9 \\ -1 & 5 & 2 & 15 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

A partir de ésta, realizaremos las transformaciones necesarias para llevarla a una triangular superior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 9 \\ -1 & 5 & 2 & 15 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 2 & 15 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 = F_3 - (-1)F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 2 & 15 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & -4 & -1 & -11 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 = F_3 - (-\frac{4}{3})F_2}$$

$$\xrightarrow{F_3 = F_3 - (-\frac{4}{3})F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 2 & 15 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{array} \right)$$

Hemos llegado a la forma buscada, ahora usando (2.2a), resolvemos por sustitución regresiva:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3 \\ x_2 &= \frac{9 - x_3}{3} = \frac{9 - 3}{3} = 2 \\ x_1 &= \frac{15 - 2x_3 - 5x_2}{-1} = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 - 15 = 1 \end{aligned}$$

Analogamente, podríamos llevar la matriz a la triangular inferior y resolver mediante sustitución progresiva.